УДК 517.95, 519.633.6.6

А. Н. Данилин, В. А. Седайкина

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АКУСТИКИ

Предложен алгоритм численного решения обратной динамической задачи о восстановлении скорости в параллельно-слоистой акустической среде по граничным данным. Решение основано на линеаризованной версии метода граничного управления. В качестве данных обратной задачи используется отклик от точечного граничного источника, измеряемый в одной точке; зондирующий импульс — импульс Рикера. Приводятся результаты численного моделирования в двумерной области.

In this paper we develop an algorithm of numerical solution of the inverse dynamical problem about speed of sound reconstruction in horizontally layered acoustical medium. The solution is based on linearized version of the Boundary Control Method. The inverse data is the response at the single boundary point from the boundary point source; the probe pulse is the Ricker wavelet. The results of numerical modeling for two-dimensional domain are presented.

Ключевые слова: метод граничного управления, численное решение обратных динамических задач.

Key words: boundary control method, numerical solving inverse dynamical problems.

Прямая задача.

Рассмотрим начально-краевую (*прямую*) задачу для волнового уравнения

$$\rho u_{tt} - (\lambda u_x)_x - (\lambda u_y)_y = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, \qquad (1)$$

$$u\,|_{t=0} = u_t\,|_{t=0} = 0, \qquad (2)$$

$$\lambda u_y\,|_{\Gamma\times[0,T]} = f, \quad \Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}. \qquad (3)$$

где $\rho(y)$ — плотность; $\lambda(y)$ — модуль сжатия; $c(y) = \sqrt{\lambda(y)/\rho(y)}$ — скорость звука. Функцию f будем называть *(граничным) управлением* и предполагать, что $f(x,t) = r(t-s)\delta(x-x_0),\ x_0 \in \Gamma,\ s \in [0,T]$, где $r(t)$ — импульс Рикера (рис. 1); δ — дельта-функция Дирака. Решение прямой задачи будем обозначать u^f и называть волной, возбужденной *управлением* f. Системе (1)-(3) сопоставим оператор реакции R^T, определяемый равенством: $R^T f = u^f\,|_{\Gamma\times[0,T]}$. Из кинематических соображений легко видеть, что оператор реакции «знает» только о значениях ρ на отрезке $[0, y_0]$:

$$\int_0^{y_0} dy / c(y) = T/2.$$

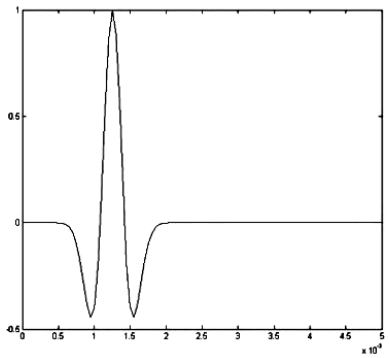

Рис. 1 . Функция Рикера (f_0 — доминирующая частота, f_0 = 20 Гц)

Обратная задача.

Рассматривается задача восстановления $\rho(y)$ на отрезке $[0, y_0]$ по оператору реакции R^{2T}. (При этом λ остается неизвестной.) Решение основано на линеаризованном варианте метода граничного управления [1—3]. Введем билинейную форму, соответствующую кинетической энергии в момент времени T:

$$K^T(f,g) \overset{def}{=} \int \rho(y) u_t^f(x,y,T) u_t^g(x,y,T)\,dxdy,$$

Оказывается, она явно определяются оператором реакции

$$K^T(f,g) = \int_{\Gamma\times[0,T]} [g_- \frac{\partial}{\partial t} u^f + f \frac{\partial}{\partial t}(u_-^g)](x,t)\,dxdt.$$

где $a_\pm(\cdot,t) = \left(a(\cdot,t) \pm a(\cdot, 2T-t)\right)/2.$

Численное решение прямой задачи.

Вводя $v = u_t, \sigma = \nabla u$, систему (1) – (3) запишем в виде

$$\begin{aligned} &\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}, \\ &\frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = \lambda \frac{\partial v}{\partial x}, \\ &\frac{\partial \sigma_y}{\partial t} = \lambda \frac{\partial v}{\partial y}, \\ &v|_{t=0} = v_t|_{t=0} = 0, \ \sigma_\nu|_{\Gamma \times [0,2T]} = f. \end{aligned} \tag{4}$$

Расчетная область – параллелепипед $D \times [0, 2T]$, $D = \{(x, y) | -a \le x \le a, 0 \le y \le b\}$. В (4) под Γ понимается граница области D, причем ее часть

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \ \Gamma_1 = \{x = -a, 0 \le y \le b\},$$
$$\Gamma_2 = \{x = a, 0 \le y \le b\}, \ \Gamma_3 = \{-a \le x \le a, y = b\}$$

выбирается таким образом, что волна, возбужденная источником в точке $x_0 \in \Gamma_0$, $\Gamma_0 = \Gamma \setminus \{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3\}$, не успевает ее достичь к моменту времени T. Для численного решения строим равномерную сетку. Запишем конечно-разностную аппроксимацию системы (4):

$$\begin{aligned} &\rho^j \frac{v^{k+1/2,i,j} - v^{k-1/2,i,j}}{\Delta t} = \frac{(\sigma_x)^{k,i+1/2,j} - (\sigma_x)^{k,i-1/2,j}}{\Delta x} + \frac{(\sigma_y)^{k,i,j+1/2} - (\sigma_y)^{k,i,j-1/2}}{\Delta y}, \\ &\frac{(\sigma_x)^{k+1,i+1/2,j} - (\sigma_x)^{k,i+1/2,j}}{\Delta t} = \lambda^j \frac{v^{k+1/2,i+1,j} - v^{k+1/2,i,j}}{\Delta x}, \\ &\frac{(\sigma_y)^{k+1,i,j+1/2} - (\sigma_y)^{k,i,j+1/2}}{\Delta t} = \lambda^j \frac{v^{k+1/2,i,j+1} - v^{k+1/2,i,j}}{\Delta y}. \end{aligned}$$

Условие устойчивости (условие Куранта): $\Delta t < \Delta x / (\sqrt{2} \cdot c_{\max})$.

Дискретная обратная задача.

Мы фиксируем две точки (источники) на Γ_0: x_0, x_1. Пусть v_0, v_1 – решения системы (4), порожденные источниками x_0 и x_1 соответственно. Тогда управления определяются только временными задержками $s\Delta t$, $l\Delta t \in [0, T]$ и билинейная форма K^T для конечного множества задержек и конечно-разностной аппроксимации запишется в виде матрицы:

$$K^T(s, l) \approx \sum_j \rho^j \sum_i v_0^{\,i,j}(T - s\Delta t) v_1^{\,i,j}(T - l\Delta t), \tag{5}$$

где $v^{i,j}(k\Delta t) = v^{k,i,j}$.

Используя данные обратной задачи, имеем

$$K^T(s,l) \approx \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{T/\Delta t} r(j\Delta t - s\Delta t)\cdot[V_1(x_0, j\Delta t) - V_1(x_0, 2T - j\Delta t)] + \\ + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{T/\Delta t}[r(j\Delta t - l\Delta t) - r(2T - j\Delta t + l\Delta t)]\cdot V_0(x_1, j\Delta t), \tag{6}$$

где $V_1(x_0, j\Delta t)$ – решение системы (4), порожденное источником x_1, взятое на границе в точке x_0, в момент времени $j\Delta t$.

Алгоритм реконструкции.

1. Для однородной области ($\rho = \rho_0 = const., \lambda = \lambda_0 = const.$) рассчитываем матрицы

$$K_0^j(s,l) \approx \sum_i v_{00}^{i,j}(T - s\Delta t)\cdot v_{01}^{i,j}(T - l\Delta t),$$

где v_{00}, v_{01} соответствуют $\rho = \rho_0 = const.$

2. Для неоднородной области (рис. 2, 3) рассчитываем $K^T(s,l)$ по формуле (6).

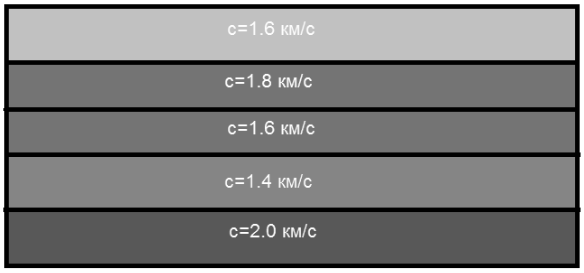

Рис. 2. Модель среды

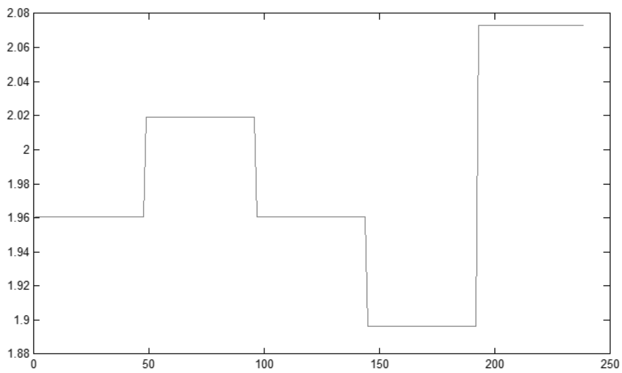

Рис. 3. Модель плотности $\rho(y)$

3. Мы используем линейное приближение матрицы (5) относительно фоновых значений ρ_0, λ_0. Тогда определение ρ_j сводится к системе линейных уравнений

$$\sum \rho_j K^j(s,l) = K^T(s,l)\,. \tag{7}$$

Численные эксперименты.

Был разработан алгоритм и программа решения прямой и обратной задачи. Шаг по сетке выбирался из условия, что длина волны (в смысле расстояния между передним и задним фронтом) укладывается в 15 точек.

Матрица и правая часть системы (7) задавались с погрешностью, так что на точном решении относительная невязка в l^2-норме составляла 10 % (рис. 4).

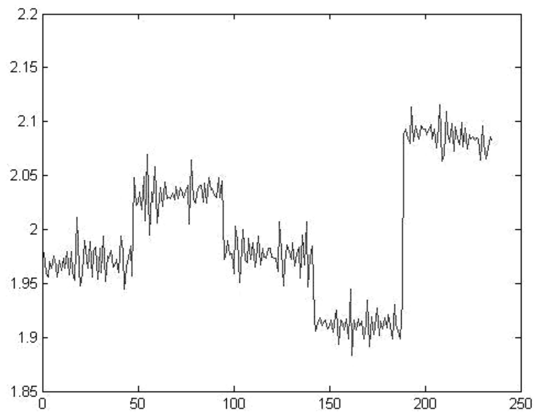

Рис. 4. Реконструкция плотности

Для улучшения результата была использована процедура фильтрации (функция smooth пакета MatLab) (рис. 5).

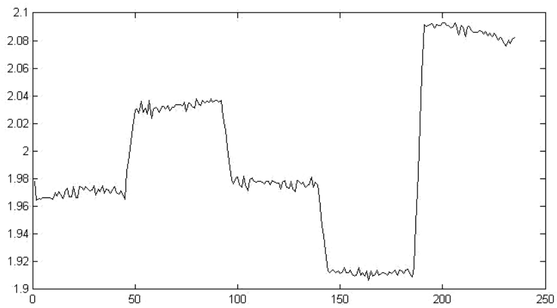

Рис. 5. Реконструкция плотности

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00260а).

Выражаем благодарность научному руководителю д-ру физ.-мат. наук Л. Н. Пестову.

Список литературы

1. *Belishev M.I.* Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC-method) // Inverse Problems. 1997. № 13. P. 1—45.

2. *Belishev M.I.* Boundary Control Method in Dynamical Inverse Problems — An Introductory Course / ed. M.I. Belishev [et al.] // Dynamical Inverse Problems: Theory and Application. CISM Courses and Lectures. Wien, 2011. Vol. 529. P. 85—150.

3. *Данилин А.Н., Пестов Л.Н.* Численное решение линеаризованной обратной краевой задачи для динамической системы Ламе // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Калининград, 2012. Вып. 10. С. 81—85.

Об авторах

Александр Николаевич Данилин — науч. сотр., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: ADanilin@kantiana.ru

Валерия Александровна Седайкина — программист, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: VSedaikina@kantiana.ru

About authors

Alexandr Danilin — research fellow, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: ADanilin@kantiana.ru

Valeria Sedaikina — programmer, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: VSedaikina@kantiana.ru